

الفصل الرابع
٤-١ العمليات على الدوال
Operations on Functions

مثال 4 من واقع الحياة — استعمال تركيب دالتين

سيارات: استعمل تركيب دالتين لحل المسألة الآتية: قدَّم معرض لبيع السيارات عرضًا بتخفيض 12% من قيمة كل سيارة جديدة. مضافًا إليه خصم مقداره 1500 ريال يقدمه وكيل شركة السيارات. فإذا أراد أحمد شراء سيارة جديدة سعرها 64500 ريال، فهل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

افهم: **المعطيات:** • نسبة التخفيض من قيمة كل سيارة 12%، وقيمة الخصم 1500 ريال.
• سعر السيارة التي يريد أحمد شراءها 64500 ريال.

المطلوب: هل سيكون السعر النهائي للسيارة أقل إذا طبق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

خطط: افترض أن x تمثل السعر الأصلي للسيارة، و$d(x)$ تمثل السعر بعد التخفيض، و $r(x)$ تمثل السعر بعد الخصم؛ إذن $[r \circ d]\ (x)$ تمثل السعر إذا طبق التخفيض قبل الخصم، و $[d \circ r]\ (x)$ تمثل السعر إذا طبق الخصم قبل التخفيض.

حل: اكتب معادلتين لدالتي التخفيض $d(x)$ ، والخصم $r(x)$.

يخفض المعرض 12% من السعر الأصلي للسيارة. فتكون دالة التخفيض

$$d(x) = x - 0.12x = 0.88\,x$$

يخصم الوكيل 1500 ريال من سعر كل سيارة جديدة؛ لذا فإن دالة الخصم هي:

$$r(x) = x - 1500$$

إذا طُبّق التخفيض قبل الخصم، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[r \circ d](64500)$.

$$[r \circ d](x) = r[d(x)]$$

$$\begin{aligned} [r \circ d](64500) &= r[d(64500)] \\ &= r[0.88\,(64500)] \\ &= r(56760) \\ &= 56760 - 1500 = 55260 \end{aligned}$$

أما إذا طُبّق الخصم قبل التخفيض، فإن السعر النهائي للسيارة يُمثّل بـ $[d \circ r](64500)$.

$$[d \circ r](x) = d[r(x)]$$

$$\begin{aligned} [d \circ r](64500) &= d[r(64500)] \\ &= d(64500 - 1500) \\ &= d(63000) \\ &= 0.88\,(63000) \\ &= 55440 \end{aligned}$$

وبما أن $[d \circ r](64500) = 55440$, $[r \circ d](64500) = 55260$.

فإن السعر النهائي للسيارة سيكون أقل عندما يُطبق التخفيض قبل الخصم.

تحقق: تبدو الإجابة منطقية؛ لأن تخفيضًا نسبته 12% سيتم تطبيقه على قيمة أكبر؛ لذا ستكون قيمة التخفيض أعلى.



تحقق من فهمك :-

تسوق: يقدم محل أجهزة كهربائية عرضين معاً على جهاز كهربائي هما: خصم 35 ريالاً ، وتخفيض نسبته 15% ، فإذا كان سعر الجهاز الأصلي 300ريال، فأيهما يعطي سعراً أقل: تطبيق التخفيض قبل الخصم أم بعده؟

$$g(x) = x - 35 \quad ، \quad f(x) = x - 0.15x = 0.85x$$

التخفيض أولاً ثم الخصم ثانياً.

$$\begin{aligned}[g \circ f](x) &= g[f(x)]\\ &= g[0.85x]\\ &= 0.85x - 35\\ &= 0.85(300) - 35\\ &= 220\end{aligned}$$

الخصم أولاً ثم التخفيض ثانياً.

$$\begin{aligned}[f \circ g](x) &= f[g(x)]\\ &= f[x - 35]\\ &= 0.85(x - 35)\\ &= 0.85x - 29.75\\ &= 0.85(300) - 29.75\\ &= 225.25\end{aligned}$$



السعر النهائي للجهاز سيكون أقل عندما يكون التخفيض أولاً ثم الخصم ثانياً.

تـــأكـد :-

مثال 1,2

أوجد $(f+g)(x)$,$(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي:

$g(x) = 3x - 1$ ، $f(x) = x + 2$ (1

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$= x + 2 + 3x - 1$$
$$= 4x + 1$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$= x + 2 - 3x + 1$$
$$= -2x + 3$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \,.\, g(x)$$
$$= (x+2)(3x-1)$$
$$= 3x^2 - x + 6x - 2$$
$$= 3x^2 + 5x - 2$$

$$(\frac{f}{g})(x) = (\frac{x+2}{3x-1}) \,,\, x \neq \frac{1}{3}$$



تأكد :-

مثال 1,2

أوجد $(f+g)(x)$,$(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالتين $f(x)$, $g(x)$ في كل مما يأتي:

2) $f(x) = x^2 - 5$ ، $g(x) = -x + 8$

$$(f+g)(x) = -x+8+x^2-5$$

$$(f+g)(x) = x^2 - x + 3$$

$$(f-g)(x) = (x^2-5) - (-x+8)$$

$$(f-g)(x) = x^2 - 5 + x - 8$$

$$(f-g)(x) = x^2 + x + 13$$

$$(f\cdot g)(x) = (x^2-5)\cdot(-x+8)$$

$$(f\cdot g)(x) = -x^3 + 8x^2 + 5x - 40$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2-5}{-x+8},\ x \neq 8$$



تــــأكـد :ـ

مثــال 3

أوجد $g\circ f$, $f\circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية إذا كان ذلك ممكنا:

3) $f = \{ (2,5), (6,10), (12,9), (7,6) \}$

$g = \{ (9,11), (6,15), (10,13), (5,8) \}$

$$g[f(2)] = g(5) = 8$$

$$g[f(6)] = g(10) = 13$$

$$g[f(12)] = g(9) = 11$$

$$g[f(7)] = g(6) = 15$$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$

$$g\circ f = \{(2,8),(6,13),(12,11),(7,15)\}$$



تــــأكـد :-

مثـال 3

أوجد $g \circ f$, $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية إذا كان ذلك ممكنا:

3) $f = \{ (2,5), (6,10), (12,9), (7,6) \}$

$g = \{ (9,11) , (6,15) , (10,13) , (5,8) \}$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$f[g(9)] = f(11)$ ، $f(11)$ غير معرفة

$f[g(6)] = f(15)$ ، $f(15)$ غير معرفة

$f[g(10)] = f(13)$ ،$f(10)$ غير معرفة

$f[g(5)] = f(8)$ ، $f(8)$ غير معرفة

بما أن 11 , 15 , 13 , 8 لا ينتميان لمجال الدالة f
فإن الدالة $f \circ g$ غير معرفة عند $x = 11$، $x = 15$ ،
$x = 13$ ، $x = 8$



تـــأكـد :-

مثـال 3

أوجد $g \circ f$, $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية إذا كان ذلك ممكنا:

4) $f = \{(-5,4) , (14,8) ,(12,1) ,(0 ,3-)\}$

$g = \{(-2,-4) ,(-3,2) ,(-1,4) ,(5 ,-6)\}$

$$[g \circ f](x) = g[f(x)]$$

$$g[f(-5)] = g(4)$$

$$g[f(14)] = g(8)$$

$$g[f(12)] = g(1)$$

$$g[f(0)] = g(-3) = 2$$

بما أن 4 , 8 , 1 لا ينتميان لمجال الدالة g
فإن الدالة $g \circ f$ غير معرفة عند $x = 4$، $x = 8$ ،
$x = 1$ وبما أن $g[f(0)]$) = 2 فإن $g \circ f = \{(0,2)\}$



تـــأكـد :-

مثال 3

أوجد $g\circ f$, $f\circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية إذا كان ذلك ممكنا:

4) $f = \{(-5,4) , (14,8) ,(12,1) ,(0 ,3-)\}$

$g = \{(-2,-4) ,(-3,2) ,(-1,4) ,(5 ,-6)\}$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$f(-4)= [g(-2)]f$ ، $f(-4)$ غير معرفة

$f(4)= [g(-1)]f$ ، $f(4)$ غير معرفة

$f(2)= [g(-3)]f$ ، $f(2)$ غير معرفة

$f(-6)= [g(5)]f$ ، $f(-6)$ غير معرفة

بما أن 4- , 2 , 4 , 6- لا ينتميان لمجال الدالة f
فإن الدالة $f\circ g$ غير معرفة عند $x=-4$ ، $x=2$ ،
$x=4$ ، $x=-6$



تـــأكـد :-

مـثـال 3

أوجد $g \circ f$, $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية إذا كان ذلك ممكنا:

5) $f(x) = -3x$ ، $g(x) = 5x - 6$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$

$= g[-3x]$

$= 5(-3x) - 6$

$= -15x - 6$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

$= f[5x - 6]$

$= -3(5x - 6)$

$= -15x + 18$

تـــأكـد :ـ

مثـال 3

أوجد $g \circ f$, $f \circ g$ لكل زوج من الدوال الآتية إذا كان ذلك ممكنا:

6) $f(x) = x + 4$ ، $g(x) = x^2 + 3x - 10$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$

$= g[x + 4]$

$= (x + 4)^2 + 3(x + 4) - 10$

$= x^2 + 8x + 16 + 3x + 12 - 10$

$= x^2 + 11x + 18$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

$= f[x^2 + 3x - 10]$

$= x^2 + 3x - 10 + 4$

$= x^2 + 3x - 6$

تـــأكـد :-

مثال 4

7) ادخار: يُقتطع ما نسبته 8% من راتب موظف للادخار. ويستطيع الموظف أن يختار بحيث يكون الاقتطاع قبل تسديده قسط آخر قيمته 17.5% من الراتب، أو بعده. فإذا كان راتب الموظف قبل الاقتطاع وتسديد القسط 9500 ريال، فهل يكون ادخاره أكثر إذا كان الاقتطاع قبل تسديد القسط أم بعده ؟ وضح إجابتك.

المبلغ المدخر **قبل** تسديد القسط هو

9500 (8%) = 760 ريالاً

المبلغ المدخر **بعد** تسديد القسط هو

9500 (17.5%) = 1662.5

9500 – 166205 = 7837.5

7837.5 (8%) = 627 ريالاً

إذن يكون ادخاره أكثر إذا كان الاقتطاع قبل تسديد القسط.

تـدرب وحـل المسائل :ــ

مثال 1,2

أوجد $(f+g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالتين $f(x)$,$g(x)$ في كل مما يأتي:

$$g(x) = 5x - 2 \quad ، \quad f(x) = x - 1 \ (8$$

$(f+g)(x)= (x-1) + (5x -2)$

$(f+g)(x)= x-1 + 5x -2$

$(f+g)(x)= 6x- 3$

$(f.g)(x)= (x-1)\ (5x -2)$

$(f.g)(x)= 5x^2- 2x\ -5x +2)$

$(f.g)(x)= 5x^2- 7x +2)$

$(f - g)(x)= (x-1) - (5x -2)$

$(f - g)(x)= x-1 - 5x +2$

$(f - g)(x)= -4x + 1$

$\frac{f}{g}(x)= \frac{x - 1}{5x - 2} \quad x \neq \frac{5}{2}$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

أوجد $(f+g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي:

$$g(x) = -x + 1 \quad ، \quad f(x) = x^2 \ (9$$

$(f.g)(x) = (x^2)(-x+1)$

$(f.g)(x) = -x^3 + x^2$

$\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{-x+1}$

$x \neq 1$

$(f+g)(x) = (x^2) + (-x+1)$

$(f+g)(x) = x^2 - x + 1$

$(f-g)(x) = (x^2) - (-x+1)$

$(f-g)(x) = (x^2) - (-x+1)$

$(f-g)(x) = x^2 + x - 1$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 1,2

أوجد $(f+g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ للدالتين $f(x), g(x)$ في كل مما يأتي:

$$g(x) = x^2 - 8x + 4 \quad ، \quad f(x) = 3x^2 - 4 \ (10$$

$$(f+g)(x) = (3x^2 - 4) + (x^2 - 8x + 4)$$

$$(f+g)(x) = 3x^2 - 4 + x^2 - 8x + 4$$

$$(f+g)(x) = 4x^2 - 8x$$

$$(f-g)(x) = (3x^2 - 4) - (x^2 - 8x + 4)$$

$$(f-g)(x) = 3x^2 - 4 - x^2 + 8x - 4$$

$$(f-g)(x) = 2x^2 + 8x - 8$$

$$(f.g)(x) = (3x^2 - 4) . (x^2 - 8x + 4)$$

$$(f.g)(x) = (3x \quad +24x^3 + 12x^2 - 4x^2 + 32x - 16)$$

$$(f.g)(x) = (3x \quad +24x^3 + 8x^2 + 32x - 16)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{3x^2 - 4}{x^2 - 8X + 4}$$

$$x \neq 4 \pm 2\sqrt{3}$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 1,2

11) مشي: يمشي راشد على ممر متحرك. فإذا كانت سرعته يعبر عنها بالدالة: $I(x) = 3x - 4$ ، وسرعة الممر المتحرك يعبر عنها بالدالة: $W(x) = 4x + 7$ حيث x الزمن بالثواني.

a) فما سرعته الكلية إذا كان يمشي باتجاه سير الممر المتحرك؟

$$(W + l)(x) = 4x + 7 + 3x - 4$$
$$= 7x + 3$$

b) كم تصبح سرعته الكلية إذا سار بعكس اتجاه سير الممر المتحرك؟

$$(l - W)\ (x) = 3x - 4 - 4x - 7$$
$$= -x - 11$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

أوجد $f\circ g$, $g\circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنا:

(12 $f = \{(-8,-4),(0,4), (2,6),(-6,-2)\}$

$g = \{(-4,4),(-2,-1),(- 4,0),(6,-5)\}$

$F(g(-4) = f(4) =$ غير معرفة

Fog	غير معرفة

$g(f(-8) = g(-4) = 4$ $g(f(0) = g(4) = -4$

$g(f(2) = g(6) = -5$ $g(f(-6) = g(-2) = -1$

$f\circ g$ غير معرفة

$(g\circ f)(x) = \{(-8,0),(0,-4),(2,-5),(-6 ,-1)\}$

تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 3

أوجد $f \circ g$, $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنا:

13) $f = \{(5,13),(-4,-2),(-8,-11),(3,1)\}$

$g = \{(-8,2),(-4,1),(3,-3),(5,7)\}$

$F(g(-8) = f(2) =$ **غير معرفة**

Fog	**غير معرفة**

$g(f(5)) = g(13) =$ **غير معرفة**

goF	**غير معرفة**

$f \circ g$ غير معرفة ، $g \circ f$ غير معرفة

تـدرب وحـل المسائل :-

مثــال 3

أوجد $f \circ g$, $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنا:

14) $f = \{(-4,-14),(0,-6),(-6,-18),(2,-2)\}$

$g = \{(-6,1),(-18,13),(-14,9),(-2,-3)\}$

$F(g(-6) = f(1) =$ غير معرفة

Fog غير معرفة

$g(f(-4)) = g(-14) = 9$ $\quad$ $g(f(0)) = g(-6) = 1$

$g(f(-6)) = g(-18) = 13$ $\quad$ $g(f(2)) = g(-2) = -3$

$f \circ g$ غير معرفة

$(g \circ f)(x) = \{(-4,9),(0,1),(-6,13),(2,-3)\}$



تـدرب وحـل المسائل :-

مثـال 3

أوجد $f \circ g$, $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنا:

15) $f = \{(-1,11),(2,-2),(5,-7),(4,-4)\}$

$g = \{(5,-4),(4,-3),(-1,2),(2,3)\}$

$F(g(5) = f(-4) =$ غير معرفة

Fog غير معرفة

$g(f(-1)) = g(11) =$ غير معرفة

$g\ of$ غير معرفة

$f \circ g$ غير معرفة ، $g \circ f$ غير معرفة



تدرب وحل المسائل :–

مثال 3

أوجد $f \circ g$, $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنا:

16) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ ، $g(x) = 4x + 3$

$$fog(x)=F(g(x) = f(4x+3)$$

$$fog(x)= 2(4x+3)^2 - (4x+3) + 1$$

$$fog(x)= 2(16x^2+24x+9) - (4x+3) + 1$$

$$fog(x)= 32x^2+24x+ 18 - 4x -3 +1$$

$$fog(x)= 32x^2+44x+ 16$$

$$gof(x)=g(f(x) = g(2x^2 - x +1)$$

$$gof(x)= 4(2x^2 - x +1) +3$$

$$gof(x)= 8x^2 -4 x +4 +3$$

$$gof(x)= 8x^2 -4 x +7$$

تـدرب وحـل المسائل :–

مثال 3

أوجد $f \circ g$, $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنا:

17) $f(x) = 4x - 1$ ، $g(x) = x^3 + 2$

$fog(x)=\mathcal{F}(g(x) = f(x^3+2)$

$fog(x)= 4(x^3+ 2) - 1$

$fog(x)= 4x^3+ 8 - 1$

$fog(x)= 4x^3+ 7$

$gof(x)=g(f(x) = g(4x - 1)$

$gof(x)= (4x - 1)^3 + 2$

تدرب وحل المسائل :–

مثال 3

أوجد $f \circ g$, $g \circ f$ لكل زوج من الدوال الآتية، إذا كان ذلك ممكنا:

$$g(x) = 8x^2 + 3x \quad ، \quad f(x) = 2x^2 \quad (18$$

$fog(x) = F(g(x) = f(8x^2 + 3x)$

$fog(x) = 2(8x^2 + 3x)^2$

$fog(x) = 2(64x + 48x^3 + 9x^2)$

$fog(x) = 128x^4 + 96x^3 + 18x^2$

$gof(x) = g(f(x) = g(2x^2)$

$gof(x) = 8(2x^2)^2 + 3(2x^2)$

$gof(x) = 32x^4 + 6x^2$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 4

19) صناعه: ينتج مصنع نوعاً من الفناجين. فإذا كان ثمن بيع x فنجان يعبر عنه بالدالة: $r(x) = 6.5x$ ، وتكلفة إنتاج x فنجان يعبر عنها بالدالة: $c(x) = 0.75x + 1850$.

a) اكتب الدالة $p(x)$ التي تعبر عن ربح المصنع إذا باع x فنجان.

$$p(x) = 5.75x - 1850$$

b) أوجد ربح المصنع عند بيع 500 فنجان و 1000 فنجان و5000 فنجان.

$$p(x) = 5.75x - 1850$$
$$p(500) = 1025$$
$$p(1000) = 3900$$
$$p(5000) = 26900$$

تدرب وحل المسائل :-

20) تسوق: يرغب سامر في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخصم نسبته 35% من السعر الأصلي. فإذا كان سعره الأصلي 2299 ريالاً ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان بعد الخصم.

a) اكتب دالتين: الأولى تمثل سعر التلفاز بعد الخصم $p(x)$ والثانية سعر التلفاز بعد إضافة بدل الضمان $t(x)$.

$$p(x) = x - 0.35x = 0.65x$$

$$t(x) = x + 0.0625x = 1.0625x$$



تدرب وحل المسائل :-

20) تسوق: يرغب سامر في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخصم نسبته 35% من السعر الأصلي. فإذا كان سعره الأصلي 2299ريالاً ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان بعد الخصم.

b) أي الدالتين يمثل سعر التلفاز النهائي: $[p \circ t](x)$، أم $[t \circ p](x)$ ؟ وضح أجابتك.

$$[p \circ t](x) = P[t(x)]$$
$$= P[1.0625x]$$
$$= 0.65(1.0625x)$$

$$[t \circ p](x) = t[P(x)]$$
$$= P[\ 0.65x\ ]$$
$$= 1.0625(0.65x)$$

بما أن $[p \circ t](x) = [t \circ p](x)$ ، فكلا الدالتين تمثل سعر التلفاز النهائي.

تدرب وحل المسائل :-

20) تسوق: يرغب سامر في شراء تلفاز ذي شاشة مسطحة معروض للبيع بخصم نسبته 35% من السعر الأصلي. فإذا كان سعره الأصلي 2299ريالاً ويضاف إليه 6.25% بدل ضمان بعد الخصم.

c) كم سيدفع سامر ثمناً للتلفاز؟

1587.75ريال

تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $f(x) = x^2 + x - 12$, $g(x) = x - 3$. فأوجد كل دالة فيما يأتي وحدد مجالها:

21) $(f - g)(x)$

$$(f - g)(x) = (x^2 + x - 12) - (x - 3)$$

$$(f - g)(x) = x^2 + x - 12 - x + 3$$

$$(f - g)(x) = x^2 - 9$$

$$(f - g)(x) = x^2 - 9$$

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية.

تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $g(x) = x - 3$, $f(x) = x^2 + x - 12$. فأوجد كل دالة فيما يأتي وحدد مجالها:

$2(g \cdot f)(x)$ (22

$$2(\mathcal{F} \cdot g)(x) = 2(x^2 + x - 12)(x - 3)$$

$$2(\mathcal{F} \cdot g)(x) = 2x(x^2 + x - 12) \; -6(x^2 + x - 12)$$

$$2(\mathcal{F} \cdot g)(x) = 2x^3 + 2x^2 - 24x \; -6x^2 - 6x + 72)$$

$$2(g \cdot f)(x) = 2x^3 - 4x^2 - 30x + 72$$

المجال = مجموعة الأعداد الحقيقية.

تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $g(x) = x - 3$, $f(x) = x^2 + x - 12$. فأوجد كل دالة فيما يأتي وحدد مجالها:

23) $(\frac{f}{g})(x)$

$$\frac{F}{g}(x) = \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$$

$$\frac{F}{g}(x) = \frac{(x+4)(x-3)}{x-3}$$

$$\frac{F}{g}(x) = (x+4)$$

$(\frac{f}{g})(x) = x + 4$ ، المجال = $\{x | x \neq 3\}$

تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $h(x) = x^2 + 6x + 8$, $g(x) = -2x + 1$,
$f(x) = 5x$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

$g[h(3)]$ (24

h(3) =3²+6*3+8

h(3) =35

g[h(3)] =-2*35+1

g[h(3)] =-69

$g[h(3)] = -69$



تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $h(x) = x^2 + 6x + 8$, $g(x) = -2x + 1$, $f(x) = 5x$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

25) $h[f(-5)]$

$f(-5) = 5*-5$ $\quad\quad$ $f(-5) = -25$

$f(-5) = -25$

$h[f(-5)] = (-25)^2+6(-25)+8$

$h[f(-5)] = 625-150+8$

$h[f(-5)] = 483$



تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $h(x) = x^2 + 6x + 8$, $g(x) = -2x + 1$, $f(x) = 5x$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

26) $h[f(9)]$

f(9) = 5*9   f(9) = 45

f(9) = 45

h[f(9)] = $(45)^2$+6(45)+8

h[f(5)] = 2025+270+8

$h[f(9)] = 2303$

تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $h(x) = x^2 + 6x + 8$, $g(x) = -2x + 1$,
$f(x) = 5x$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

$f[g(3a)]$ (27

$g(3a) = 5*3a$ $g(3a) = 15a$

$f(15a) = 5(15a+1)$

$f[g(3a)] = -30a + 5$

تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $h(x) = x^2 + 6x + 8$ ، $g(x) = -2x + 1$ ،
$f(x) = 5x$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

$f[h(a + 4)]$ (28

$$h(a+4) = (a+4)^2 + 6(a+4) + 8$$

$$h(a+4) = a^2 + 8a + 16 + 6a + 24 + 8$$

$$h(a+4) = a^2 + 14a + 48$$

$$f[h(a+4)] = 5(a^2 + 14a + 48)$$

$$f[h(a + 4)] = 5a^2 + 70a + 240$$

تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $h(x) = x^2 + 6x + 8$, $g(x) = -2x + 1$,
$f(x) = 5x$ فأوجد قيمة كل مما يأتي:

$g[f(a^2 - a)]$ (29

$$f(a^2-a) = 5(a^2-a)$$

$$f(a^2-a) = 5a^2-5a$$

$$g[f(a^2-a)] = -2(5a^2-5a)+1$$

$$g[f(a^2 - a)] = -10a^2 + 10a + 1$$

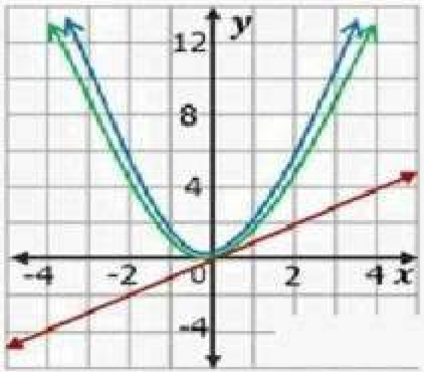
تـدرب وحـل المسـائل :–

30) تمثيلات متعددة: لتكن $g(x) = x$, $f(x) = x^2$.

a) جدولياً: أنشئ جدولاً يبين بعض قيم الدوال: $f(x)$, $g(x)$, $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$.

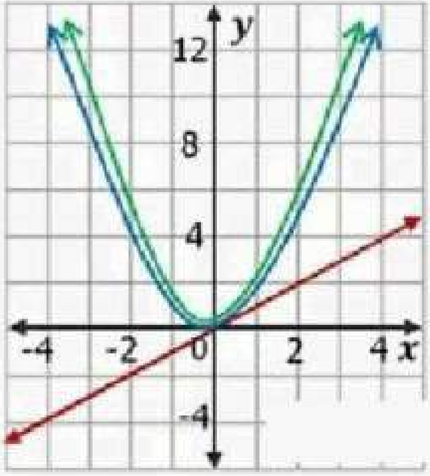
x	$f(x)=x^2$	$g(x) = x$	$(f+g)(x) = x^2 - x$	$(f-g)(x) = x^2 - x$
-3	9	-3	6	12
-2	4	-2	2	6
-1	1	-1	0	2
0	0	0	0	0
1	1	1	2	0
2	4	2	6	2
3	9	3	12	6

b) بيانياً: مثل بيانياً الدوال $f(x)$, $g(x)$, $(f+g)(x)$ على مستوى أحداثي واحد.



تـدرب وحـل المسـائل :−

30) تمثيلات متعددة: لتكن $g(x) = x$, $f(x) = x^2$.



c) بيانياً: مثل بيانياً الدوال $f(x), g(x), (f - g)(x)$ على مستوى إحداثي واحد.

d) لفظيا: صف العلاقة بين التمثيلات البيانية للدوال $f(x)$, $g(x)$, $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$.

إجابة ممكنة: لأي قيمة من قيم x تكون المسافة الرأسية بين تمثيل الدالة $g(x)$ البياني ومحور ـ x مساوية للمسافة الرأسية بين التمثيليين البيانين للدالتين $f(x),(f+g)$ وهي مساوية أيضا للمسافة الرأسية بين التمثيليين البيانيين للدالتين $f(x),(f\text{-}g)$

تـدرب وحـل المسائل :-

31) توظيف: يمكن التعبير عن عدد الرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1414هـ في مؤسسة ما بالمعادلتين الآتيتين: عدد الرجال : $y = 7x + 6$

عدد النساء : $y = 5x + 5$

حيث x تمثل عدد الأعوام منذ عام 1414هـ و y تمثل عدد الموظفين.

a) اكتب دالة تمثل العدد الكلي للرجال والنساء الذين تم توظيفهم منذ عام 1414هـ .

$$y = 12x + 11$$

b) إذا كانت الدالة f تمثل عدد الرجال الذين تم توظيفهم والدالة g تمثل عدد النساء اللاتي تم توظيفهن فماذا تمثل الدالة $(f - g)(x)$؟

تمثل الفرق بين عدد الرجال وعدد النساء الذين تم توظيفهم.



تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $f(x)=x+2,\ g(x)=-4x+3\ ,\ h(x)=x^2-2x+1$
فأوجد قيمة كل مما يأتي:

32) $(f\cdot g\cdot h)(3)$

$(f.g.h)(x)=(x+2)(-4x+3)(x^2-2x+1)$

$(f.g.h)(3)=(3+2)(-12+3)(9-6+1)$

$(f.g.h)(3)=(5)(-9)(4)$

$(f\cdot g\cdot h)(3)=-180$

الفهرس



تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $f(x)=x+2,\ g(x)=-4x+3\ ,\ h(x)=x^2-2x+1$
فأوجد قيمة كل مما يأتي:

$[(f+g)\cdot h](1)$ (33

$$(f+g)(x)=(x+2)+(-4x+3)$$

$$[(f+g).\ h](x)=[(x+2)+(-4x+3)\ ].(x^2-2x+1)$$

$$[(f+g).\ h](1)=[(1+2)(-4+3)\ ].(1^2-2+1)$$

$$[(f+g).\ h](1)=(-3)\ .(0)$$

$$[(f+g)\cdot h](1)=0$$

الفهرس

تـدرب وحـل المسائل :–

إذا كان $f(x)=x+2,\ g(x)=-4x+3,\ h(x)=x^2-2x+1$
فأوجد قيمة كل مما يأتي:

34) $\left(\frac{h}{f\cdot g}\right)(-6)$

$$(f.g)(x)=(x+2)(-4x+3)$$

$$\frac{h}{(f.g)}(x)=\frac{x^2-2x+1}{(x+2)(-4x+3)}$$

$$\frac{h}{(f.g)}(-6)=\frac{(-6)^2-2(-6)+1}{(-6+2)(24+3)}$$

$$\left(\frac{h}{f\cdot g}\right)(-6)=-\frac{49}{108}$$

الفهرس



تـدرب وحـل المسائل :-

إذا كان $f(x)=x+2,\ g(x)=-4x+3\ ,\ h(x)=x^2-2x+1$
فأوجد قيمة كل مما يأتي:

$[f\circ(g\circ h)](2)$ (35

$(goh)(x)= g[h(x)]$

$(goh)(x)= g(x^2-2x+1)$

$(goh)(x)= -4(x^2-2x+1) +3$

$(goh)(x)= -4x^2 +8x - 1$

$fo(goh)(x)= f[(goh)(x)$

$fo(goh)(x)= f(-4x^2 +8x-1)$

$fo(goh)(x)= (-4x^2 +8x-1)+2$

$fo(goh)(x)= -4x^2 +8x +1$

$fo(goh)(2)= -4(2)^2 +8(2) +1$

$fo(goh)(2)= -16 +16 +1$

$$[f\circ(g\circ h)](2) = 1$$

الفهرس



تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $f(x)=x+2,\ g(x)=-4x+3\ ,\ h(x)=x^2-2x+1$

فأوجد قيمة كل مما يأتي:

$[g\circ(h\circ f)](-4)$ (36

$(hof)(x)=h[f(x)]$ $(hof)(x)=h(x+2)$

$(hof)(x)=(x+2)^2-2(x+2)+1$

$[go(hof)(x)]=g[(x+2)^2-2(x+2)+1]$

$[go(hof)(x)]=-4[(x+2)^2-2(x+2)+1]+3$

$[go(hof)(-4)]=-4[(-4+2)^2-2(-4+2)+1]+3$

$[go(hof)(-4)]=-4(9)+3$

$[go(hof)(-4)]=-33$

$[g\circ(h\circ f)](-4)=-33$

الفهرس

تدرب وحل المسائل :-

إذا كان $f(x)=x+2,\ g(x)=-4x+3,\ h(x)=x^2-2x+1$
فأوجد قيمة كل مما يأتي:

$[h\circ(f\circ g)](5)$ (37

$(fog)(x)=f[g(x)]$

$(fog)(x)=f(-4x+3)$

$(fog)(x)=(-4x+3)+2$

$(fog)(x)=-4x+5$

$[ho(fog)(x)]=h(-4x+5)$

$[ho(fog)(x)]=(-4x+5)^2-2(-4x+5)+1$

$[ho(fog)(5)]=(-4(5)+5)^2-2(-4(5)+5)+1$

$[ho(fog)(5)]=225+30+1$

$[ho(fog)(5)]=256$

$[h\circ(f\circ g)](5)=256$

الفهرس



الفصل الـرابـع
٤-٢ الـعلاقـــات والــدوال العكسية
Inverse Functions and Relations

فيما سبق
درست كتابة معادلات بالنسبة لمتغير محدد وحلها.

والآن
- أجد كلًّا من العلاقة العكسية والدالة العكسية.
- أحدّد ما إذا كانت علاقة (أو دالة) تمثل علاقة عكسية (أو دالة عكسية) لأخرى أم لا.

المفردات
العلاقة العكسية inverse relation

الدالة العكسية inverse function

لماذا؟
يبين الجدول المجاور قيمة الريال السعودي مقارنة بالدولار الأمريكي، والدالة $d = 0.267\ r$ تمثل عدد الدولارات التي تحصل عليها مقابل كل ريال سعودي، ولمعرفة عدد الريالات التي تحصل عليها مقابل كل دولار أمريكي، حل المعادلة السابقة بالنسبة للمتغير r فتكون النتيجة $r \approx 3.75\ d$ وتمثل دالة عكسية للدالة السابقة .

	السعودية	أمريكا
السعودية		0.267
أمريكا	3.75	

مفهوم أساسي — العلاقة العكسية
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تكون كل من العلاقتين عكسية للأخرى إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي: كلما احتوت إحداهما على زوج مرتب (a, b)، احتوت الأخرى على الزوج المرتب (b, a).

مثال: كل من العلاقتين A, B علاقة عكسية للأخرى:

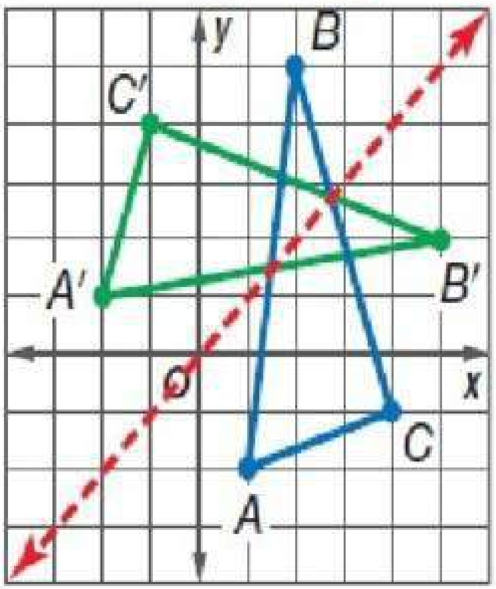
$$A = \{(1, 5), (2, 6), (3, 7)\} \quad B = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3)\}$$



الفصل الرابع
٤-٢ العلاقات والدوال العكسية
Inverse Functions and Relations

مثال 1 إيجاد العلاقة العكسية

هندسة : يمكن تمثيل رؤوس $\triangle ABC$ بالعلاقة $\{(1, -2), (2, 5), (4, -1)\}$.
أوجد العلاقة العكسية لها، ثم مثِّل بيانيًّا العلاقة والعلاقة العكسية لها على مستوى إحداثي واحد، واذكر التحويل الهندسي الذي يحوّل العلاقة المعطاة إلى العلاقة العكسية لها.



مثّل العلاقة بيانيًّا. ولإيجاد العلاقة العكسية قم بتبديل إحداثيات الأزواج المرتبة. فتكون العلاقة العكسية هي: $\{(-2, 1), (5, 2), (-1, 4)\}$. وبتمثيل هذه الأزواج المرتبة للعلاقة العكسية بيانيًّا يتضح أنها تمثل رؤوس $\triangle A'B'C'$ بعد انعكاس رؤوس $\triangle ABC$ حول المستقيم $y = x$.

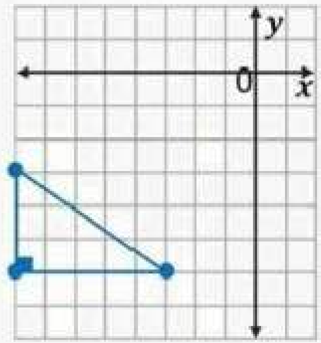


الفصل الرابع
٤-٢ العلاقات والدوال العكسية

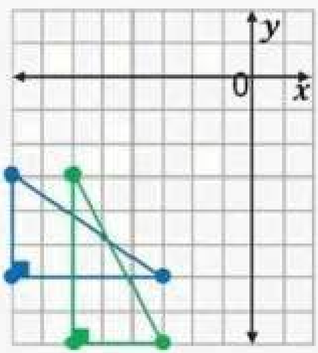
تحقق من فهمك :-

1) هندسة: إذا كانت الأزواج المرتبة للعلاقة {(6- , 3-),(6- , 8-),(3- , 8-)} تمثل إحداثيات رؤوس مثلث قائم الزاوية. فأوجد العلاقة العكسية لها، وصف تمثيلها البياني.

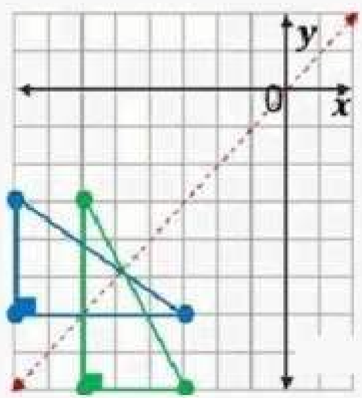
العلاقة الأصلية:
{(-8,-3),(-8,-6),(-3,-6)}



العلاقة العكسية:
{(-3,-8),(-6,-8),(-6,-3)}



وصف تمثيلها البياني:
انعكاس لرؤوس المثلث حول المستقيم $y = x$.





الفصل الرابع

٤-٢ العلاقات والدوال العكسية

Inverse Functions and Relations

إن ما ينطبق على الأزواج المرتبة في العلاقة والعلاقة العكسية، ينطبق أيضًا على الأزواج المرتبة في الدالة ومعكوسها، وإذا كان معكوس الدالة يمثل دالةً أيضًا، فإنه يسمى **دالة عكسية**. ويرمز إلى الدالة العكسية للدالة $f(x)$ بالرمز $f^{-1}(x)$.

قراءة الرياضيات

الدالة العكسية

f^{-1} يقرأ الدالة العكسية للدالة f. تذكَّر أن (-1) ليس أسًا.

أضف إلى مطويتك

مفهوم أساسي: خواص الدالة العكسية

التعبير اللفظي: إذا كان كل من f, f^{-1} دالة عكسية للأخرى، فإن $f(a) = b$ إذا وفقط إذا كان $f^{-1}(b) = a$.

مثال: ليكن $f(x) = x - 4$ ودالتها العكسية هي $f^{-1}(x) = x + 4$.

أوجد $f(6)$.

$$f(x) = x - 4$$

$$f(6) = 6 - 4 = 2$$

أوجد $f^{-1}(2)$.

$$f^{-1}(x) = x + 4$$

$$f^{-1}(2) = 2 + 4 = 6$$

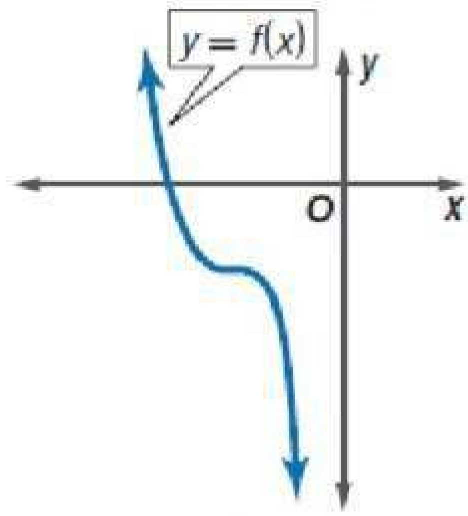
وبما أن كلًا من $f(x)$, $f^{-1}(x)$ دالة عكسية للأخرى، فإن $f(6) = 2, f^{-1}(2) = 6$.

الفصل الرابع

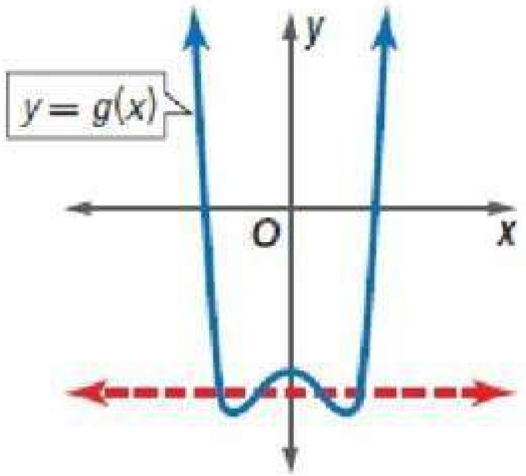
٤-٢ العلاقات والدوال العكسية

Inverse Functions and Relations

اختبار الخط الأفقي: إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أيضًا، فإن الدالة الأصلية تكون دالة متباينة. تذكّر أنه يمكنك استعمال اختبار الخط الرأسي لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا. وبالمثل يمكنك استعمال اختبار الخط الأفقي لتحديد ما إذا كان معكوس دالة يمثل دالة أم لا.



لا يمكن رسم أي مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة (الدالة متباينة)؛ لذا يمثّل معكوس الدالة $y = f(x)$ دالة أيضًا.



يمكن رسم مستقيم أفقي يقطع منحنى الدالة، في أكثر من نقطة (الدالة ليست متباينة)؛ لذا لا يكون معكوس الدالة $y = g(x)$ دالةً.

يمكنك إيجاد معكوس دالة بالتبديل بين x و y في قاعدة الدالة.

مثال 2 إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًا

أوجد معكوس كلٍّ من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًا على مستوى إحداثي واحد.

a) $f(x) = 2x - 5$

الخطوة 1: أعد كتابة الدالة كمعادلة بدلالة المتغيرين x, y

$$f(x) = 2x - 5 \rightarrow y = 2x - 5$$

الخطوة 2: بدّل بين كلٍّ من المتغير x والمتغير y في المعادلة $x = 2y - 5$

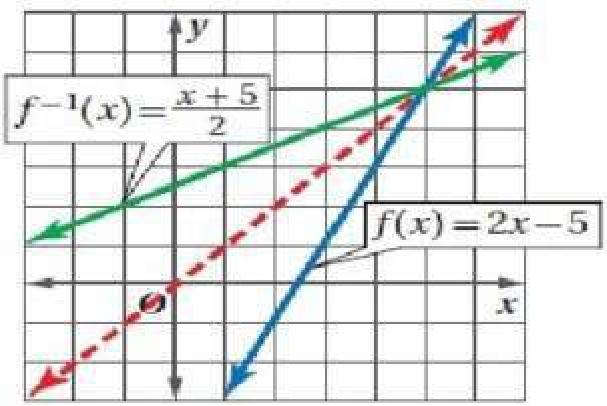
الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$$x = 2y - 5$$

$x + 5 = 2y$ أضف 5 للطرفين

$\frac{x+5}{2} = y$ اقسم الطرفين على 2

الخطوة 4: ضع $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y، إذا كان المعكوس دالةً.



بما أن الدالة $f(x)$ خطية، وباستعمال اختبار الخط الأفقي، تجد أن معكوسها هو دالة أيضًا، لذا يمكنك استعمال الرمز $f^{-1}(x)$

$$y = \frac{x+5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

فتكون الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x - 5$ هي $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

والتمثيل البياني للدالة $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$ هي انعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 5$ حول المستقيم $y = x$.

مثال 2 إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًا

أوجد معكوس كلٍّ من الدالتين الآتيتين، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانيًا على مستوى إحداثي واحد.

a) $f(x) = 2x - 5$

الخطوة 1: أعد كتابة الدالة كمعادلة بدلالة المتغيرين x, y

$$f(x) = 2x - 5 \rightarrow y = 2x - 5$$

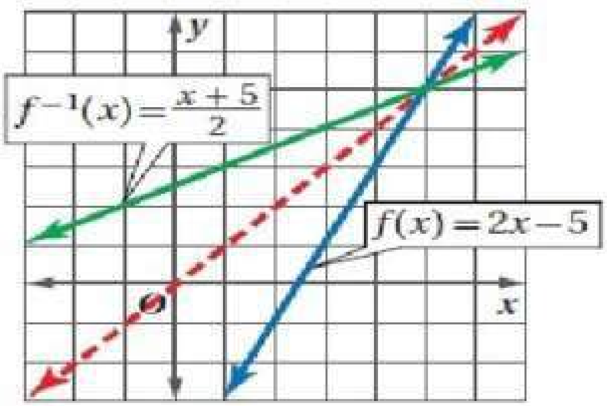
الخطوة 2: بدّل بين كلٍّ من المتغير x والمتغير y في المعادلة $x = 2y - 5$

الخطوة 3: حل المعادلة بالنسبة للمتغير y.

$$x = 2y - 5$$

أضف 5 للطرفين $x + 5 = 2y$

اقسم الطرفين على 2 $\frac{x+5}{2} = y$



الخطوة 4: ضع $f^{-1}(x)$ بدلًا من المتغير y، إذا كان المعكوس دالةً.

بما أن الدالة $f(x)$ خطية، وباستعمال اختبار الخط الأفقي، تجد أن معكوسها هو دالة أيضًا، لذا يمكنك استعمال الرمز $f^{-1}(x)$

$$y = \frac{x+5}{2} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

فتكون الدالة العكسية للدالة $f(x) = 2x - 5$ هي $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

والتمثيل البياني للدالة $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$ هي انعكاس للتمثيل البياني للدالة $f(x) = 2x - 5$ حول المستقيم $y = x$.

$f(x) = x^2 + 1$ (b

الخطوة 1: $f(x) = x^2 + 1 \rightarrow y = x^2 + 1$

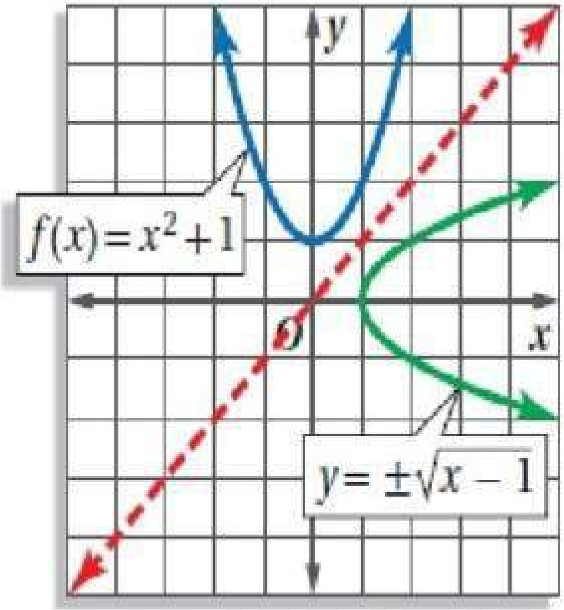
الخطوة 2: $x = y^2 + 1$

الخطوة 3: $x = y^2 + 1$

$x - 1 = y^2$ اطرح 1 من كلا الطرفين

$\pm\sqrt{x-1} = y$ خُذ الجذر التربيعي للطرفين

الخطوة 4: $y = \pm\sqrt{x-1}$



مثّل بيانيًا $y = \pm\sqrt{x-1}$ بإجراء انعكاس لمنحنى الدالة $f(x) = x^2 + 1$ حول المستقيم $y = x$.

تحقق من فهمك :ــ

أوجد معكوس كل من الدالتين الآتيتين ، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد.

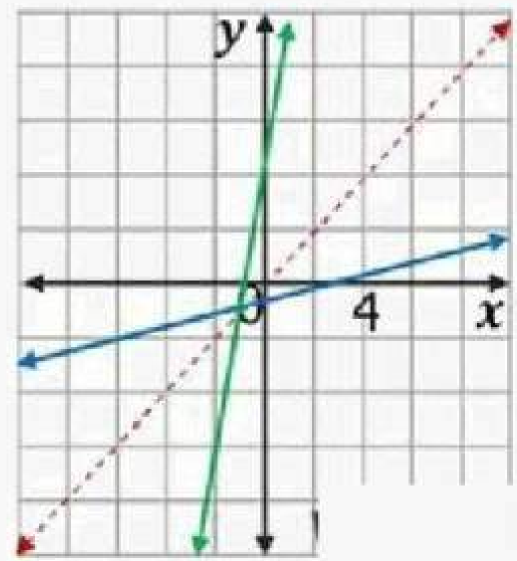
$$f(x) = \frac{x-3}{5} \quad (2A$$

$$y = \frac{x-3}{5}$$

$$x = \frac{y-3}{5}$$

$$y = 5x + 3$$

$$f^{-1}(x) = 5x + 3$$



(2

الفصل الرابع
٤-٢ العلاقات والدوال العكسية

تحقق من فهمك :-

أوجد معكوس كل من الدالتين الآتيتين ، ثم مثّل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد.

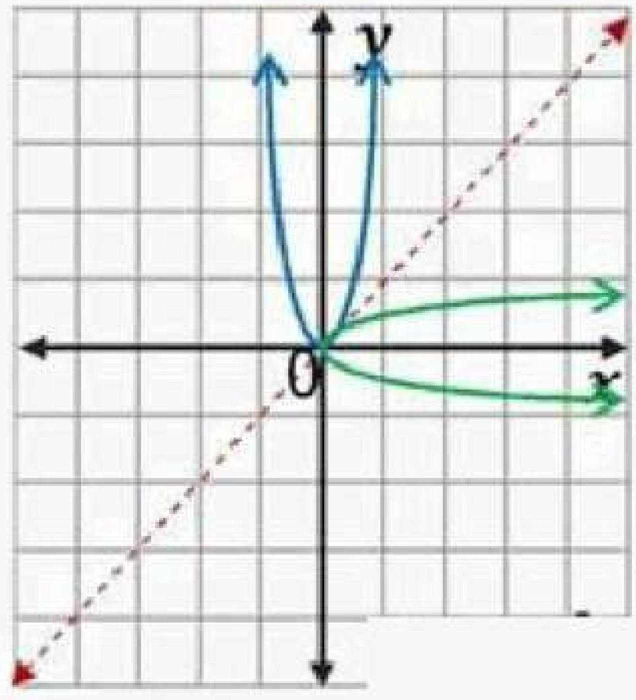
$f(x) = 3x^2$ (2B

$$y = 3x^2$$

$$x = 3y^2$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x}$$

$$f^{-1}(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}x}$$





الفصل الرابع
٤-٢ العلاقات والدوال العكسية
Inverse Functions and Relations

التأكد من الدالة العكسية: يمكنك تحديد ما إذا كانت دالتان، كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا، وذلك بإيجاد كلٍّ من تركيبَيهما.

مفهوم أساسي — الدالة العكسية

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تكون كلٌّ من الدالتين f, g دالة عكسيةً للأخرى، إذا وفقط إذا كان تركيب كلٍّ منهما يساوي الدالة المحايدة $I(x) = (x)$.

الرموز: الدالتان $f(x), g(x)$ كلٌّ منهما تمثل دالة عكسية للأخرى، إذا وفقط إذا كان $[g \circ f](x) = [f \circ g](x) = x$.

مثال 3 التأكد أن كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى

في كلٍّ زوجٍ ممَّا يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ ووضِّح إجابتك.

a) $f(x) = 3x + 9 \, , \, g(x) = \frac{1}{3}x - 3$

تأكد بأن تركيب الدالتين $g(x)$ ، $f(x)$ يساوي الدالة المحايدة.

$$\begin{aligned}[f \circ g](x) &= f[g(x)] \\ &= f\left(\tfrac{1}{3}x - 3\right) \\ &= 3\left(\tfrac{1}{3}x - 3\right) + 9 \\ &= x - 9 + 9 = x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[g \circ f](x) &= g[f(x)] \\ &= g(3x + 9) \\ &= \tfrac{1}{3}(3x + 9) - 3 \\ &= x + 3 - 3 = x\end{aligned}$$

إذن تمثل كلٌّ من الدالتين دالة عكسية للأخرى؛ لأن $x = [g \circ f](x) = [f \circ g](x)$.

b) $f(x) = 4x^2, g(x) = 2\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}[f \circ g](x) &= f(2\sqrt{x}) \\ &= 4(2\sqrt{x})^2 \\ &= 4(4x) = 16x\end{aligned}$$

بما أن $[f \circ g](x) \neq x$، فإن الدالتين $g(x)$ و $f(x)$ لا تمثل كلٌّ منهما دالة عكسية للأخرى.

تحقق من فهمك :-

3) في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ وضح إجابتك.

(3A $f(x) = 3x - 3$ و $g(x) = \frac{1}{3}x + 4$

$$[f \circ g](x) = f[g(x)]$$

$$= f[\ \frac{1}{3}x + 4\ ]$$

$$= 3(\frac{1}{3}x + 4) - 3$$

$$= x + 9$$

بما أن ، $[f \circ g](x) \neq x$ ، فإن الدالتين $g(x)$ ، $f(x)$
لا تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى.

تحقق من فهمك :-

3) في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا؟ وضح إجابتك.

3B) $f(x) = 2x^3 - 1$ و $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$

$[f \circ g](x) = f[g(x)]$

$= f[\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}]$

$= 2(\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}})^3 - 1$

$= x$

$[g \circ f](x) = g[f(x)]$

$= g[2x^3 - 1]$

$= \sqrt[3]{\frac{2x^3-1+1}{2}}$

$= x$

إذن، تمثل كل من الدالتين دالة عكسية للأخرى لأن

$[g \circ f](x) = [f \circ g](x) = x$



تـــأكـد :-

مثال 1

أوجد العلاقة العكسية لكل من العلاقتين الآتيتين:

1) $\{(-9,10),(1,-3),(8,-5)\}$

$\{(10,-9),(-3,1),(-5,8)\}$

2) $\{(-2,9),(4,-1),(-7,9),(7,0)\}$

$\{(9,-2),(-1,4),(9,-7),(0,7)\}$

تـــأكـد :-

مثـال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$f(x) = -3x \quad (3$$

$$y = -3x$$

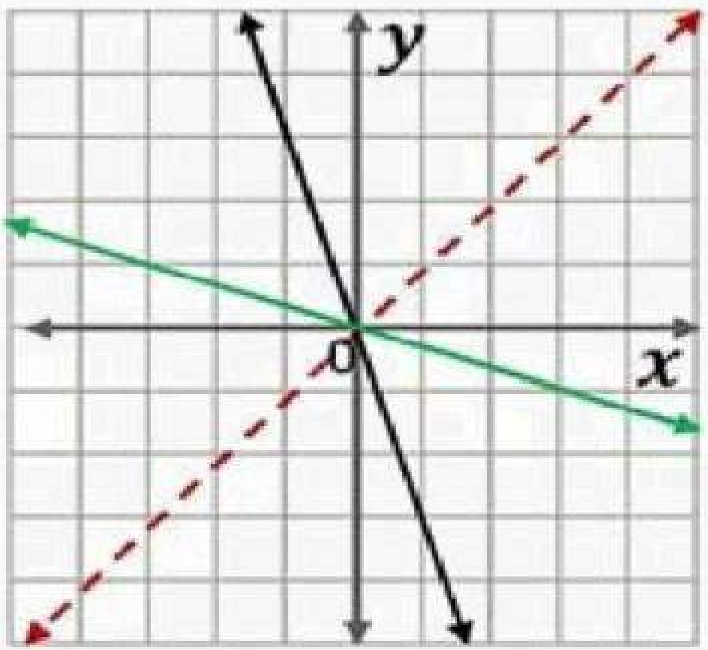
$$\frac{-3x}{-3} = \frac{y}{-3}$$

بالقسمة على 3-

$$x = -\frac{1}{3}y$$

$$y = -\frac{1}{3}x$$

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}x$$





تـــأكـد :-

مثال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

4) $g(x) = 4x - 6$

$$y = 4x - 6$$

$$4x - 6 = y$$

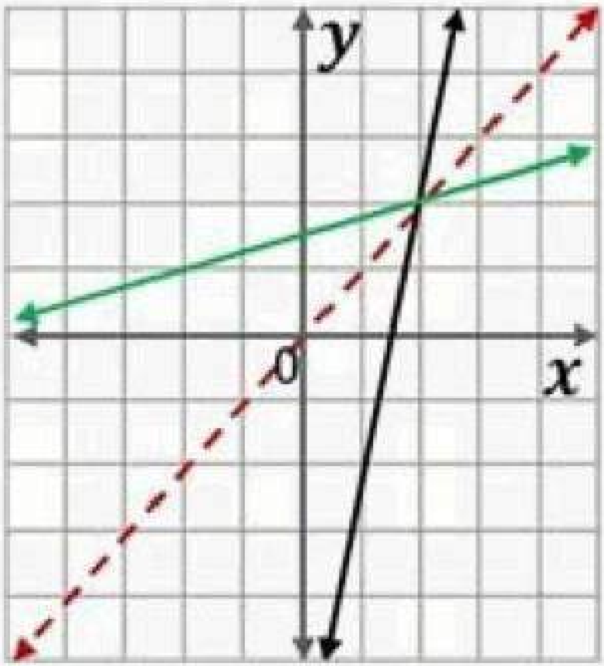
بالقسمة على 4

$$\frac{4x}{4} = \frac{y + 6}{4}$$

$$x = \frac{y + 6}{4}$$

$$y = \frac{x + 6}{4}$$

$$g^{-1}(x) = \frac{x+6}{4}$$



تـــأكـد :-

مثـال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$h(x) = x^2 - 3$ (5

$y = x^2 - 3$

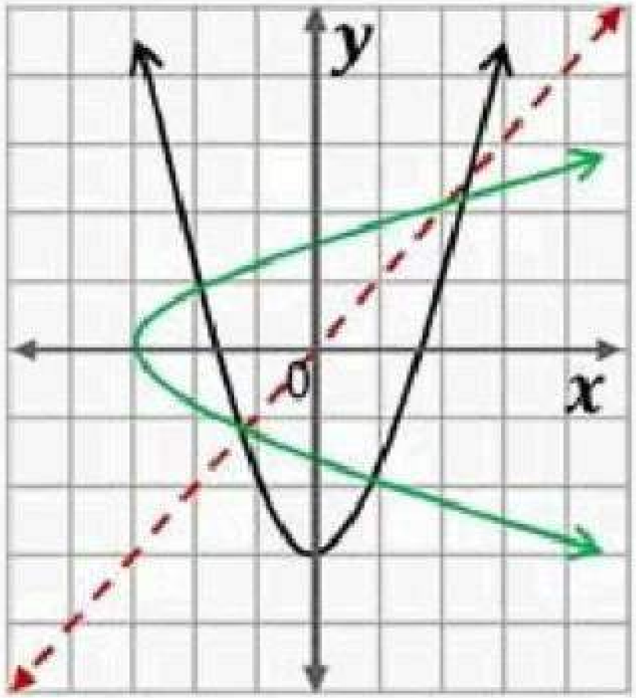
$x^2 - 3 = y$

$x^2 = y + 3$

$x = \pm \sqrt{y + 3}$

$y = \pm \sqrt{x + 3}$

$y = \pm \sqrt{x + 3}$



تـــأكـد :-

مثـال 3

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

6) $f(x) = x - 7$ ، $g(x) = x + 7$

$(fog)(x) = f(x+7)$ $(fog)(x) = f[g(x)]$

$$(fog)(x) = (x+7) - 7$$

$$(fog)(x) = x + 7 - 7$$

$$(fog)(x) = x$$

نـعم كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى



تـــأكـد :-

مثـال 3

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

7) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ ، $g(x) = 2x - \frac{4}{3}$

$(fog)(x) = f[g(x)]$

$(fog)(x) = f\left(2x + \frac{3}{2}\right)$

$(fog)(x) = \quad \left(2x + \frac{3}{2}\right)$

$(fog)(x) = \frac{1}{2}\left(2x + \frac{3}{2}\right)$

$(fog)(x) = x + \frac{3}{4}$

$(fog)(x) \neq x$

لا تمثل دالة عكسية للأخرى

تـــأكـد :-

مثـال 3

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

8) $f(x) = 2x^3$ ، $g(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}$

$(fog)(x) = f[g(x)]$

$(fog)(x) = f\left(\frac{1}{3}\sqrt{x}\right)$

$(fog)(x) = 2\left(\frac{1}{3}\sqrt{x}\right)^3$

$(fog)(x) = \frac{2}{9}x\sqrt{x}$

$(fog)(x) \neq x$

لا تمثل دالة عكسية للأخرى



تدرب وحل المسائل :-

مثال 1

أوجد العلاقة العكسية لكل من العلاقتين الآتيتين:

9) $\{(1,-5),(2,6),(3,-7),(4,8),(5,-9)\}$

$\{(-5,1),(6,2),(-7,3),(8,4),(-9,5)\}$

10) $\{(3,0),(5,4),(7,-8),(9,12),(11,16)\}$

$\{(0,3),(4,5),(-8,7),(12,9),(16,11)\}$

تـدرب وحـل المسـائل :ـ

مثـال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسـها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$f(x) = x + 2 \quad (11$$

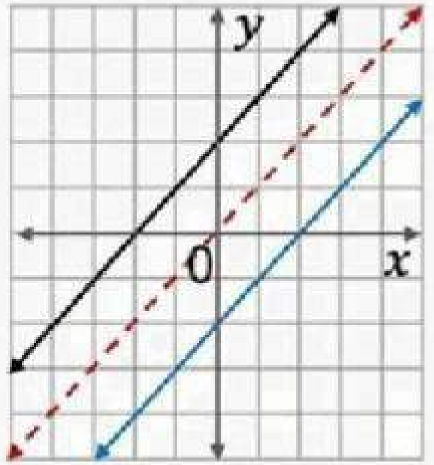
$$y = x + 2$$

$$x + 2 = y$$

$$x = y - 2$$

$$y = x - 2$$

$$f^{-1}(x) = x - 2$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$\mathbf{g}(x) = 5x \quad (12$$

$$y = 5x$$

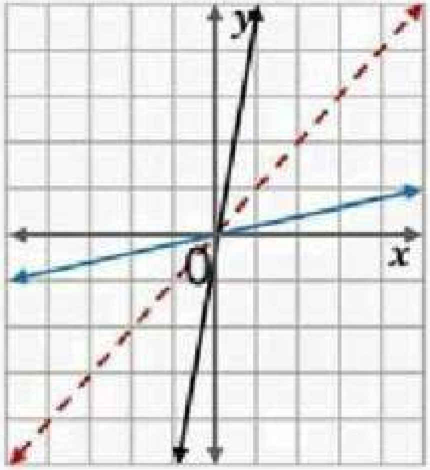
$$\frac{5x}{5} = \frac{y}{5}$$

بالقسمة على 5

$$x = \frac{1}{5}y$$

$$y = \frac{1}{5}x$$

$$\mathbf{g}^{-1}(x) = \frac{1}{5}x$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

13) $y = -2x + 1$

$y = -2x + 1$

$-2x + 1 = y$

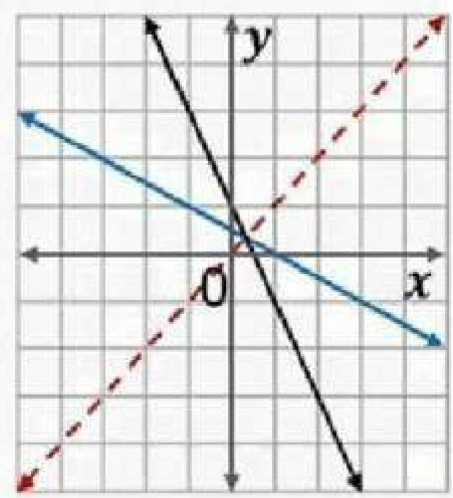
$-2x = y - 1$ بالقسمة على -2

$\frac{-2x}{-2} = \frac{y - 1}{-2}$

$x = \frac{y - 1}{-2}$

$y = \frac{x - 1}{-2}$

$y^{-1} = \frac{x-1}{-2}$



تـدرب وحل المسائل :ـ

مثـال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسـها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$h(x) = \frac{x-4}{3} \quad (14$$

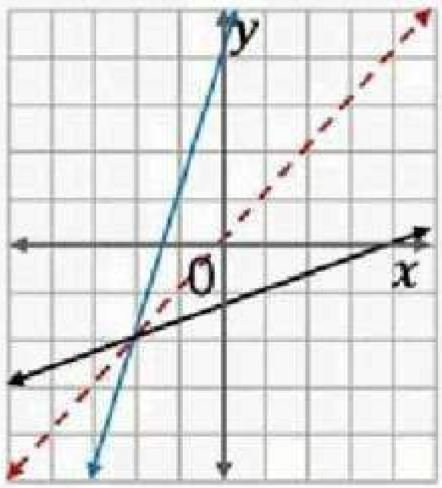
$$y = \frac{x-4}{3}$$

$$x - 4 = 3y$$

$$x = 3y + 4$$

$$y = 3x + 4$$

$h^{-1}(x) = 3x + 4$



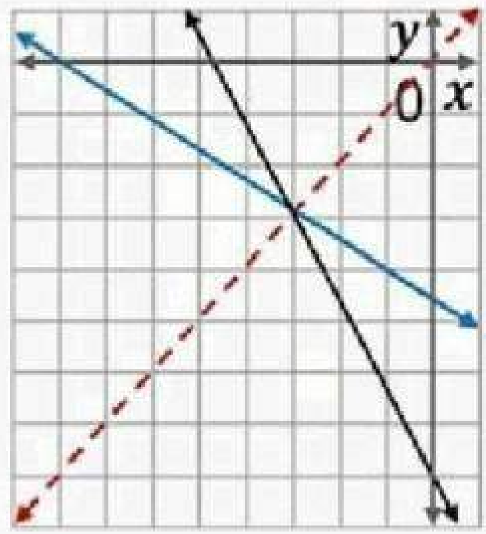
تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$y = -\frac{5}{3}x - 8 \quad (15$$

$$y^{-1} = -\frac{3}{5}(x + 8)$$



$$y = -\frac{5}{3}x - 8$$

$$\frac{5}{3}x = -y - 8$$

$$x = -\frac{3}{5}(y + 8)$$

$$y = -\frac{3}{5}(x + 8)$$

تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$h(x) = x^2 + 4 \quad (16$$

$$y = x^2 + 4$$

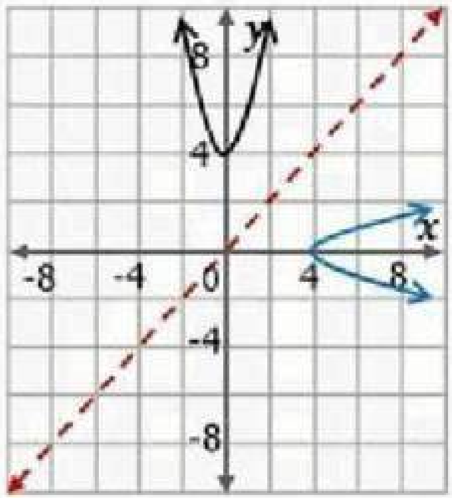
$$x^2 + 4 = y$$

$$x^2 = y - 4$$

$$x = \pm\sqrt{y - 4}$$

$$y = \pm\sqrt{x - 4}$$

$$y = \pm\sqrt{x - 4}$$



تدرب وحل المسائل :ـ

مثال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$f(x) = 5x^2 \quad (17$$

$$y = 5x^2$$

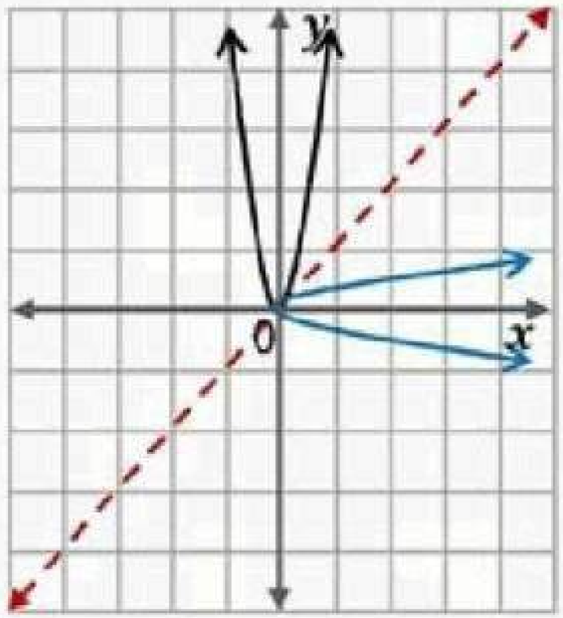
$$5x^2 = y$$

$$x^2 = \frac{1}{5}y$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{5}y}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{5}x}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{5}x}$$



تدرب وحل المسائل :-

مثال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad (18$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - 1$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 1 = y$$

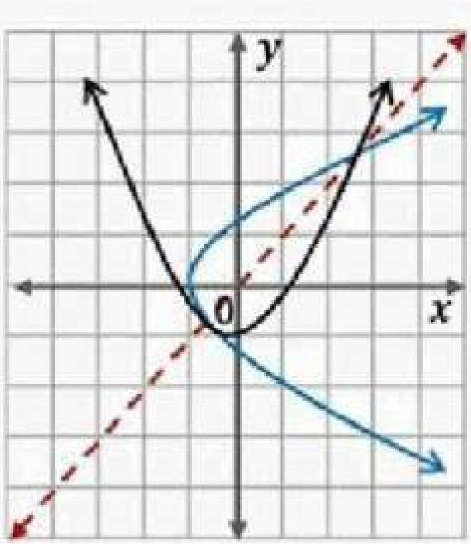
$$x^2 - 2 = 2y$$

$$x^2 = 2y + 2$$

$$x = \pm\sqrt{2y + 2}$$

$$y = \pm\sqrt{2x + 2}$$

$$y = \pm\sqrt{2x + 2}$$



تدرب وحل المسائل :–

مثال 2

أوجد معكوس كل من الدوال الآتية، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى إحداثي واحد:

$$y = (x+1)^2 + 3 \quad (19$$

$$y = (x+1)^2 + 3$$

$$(x+1)^2 + 3 = y$$

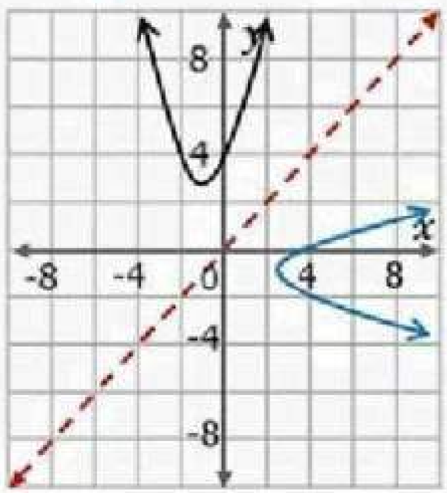
$$(x+1)^2 = y - 3$$

$$(x+1) = \pm\sqrt{y-3}$$

$$x = \pm\sqrt{y-3} - 1$$

$$y = \pm\sqrt{x-3} - 1$$

$$y^{-1} = \pm\sqrt{x-3} - 1$$



تدرب وحل المسائل :ـ

مثال 3

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

$g(x) = 2x - 3$ ، $f(x) = 2x + 3$ (20

$fog(x) = f(g(x)) = f(2x - 3)$

$fog(x) = 2(2x - 3) + 3$

$fog(x) = 4x - 6 + 3$

$fog(x) = 4x - 3$

$fog(x) \neq x$

لا تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى

تـدرب وحـل المسائل :ـ

مثــال 3

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

(21 $f(x) = -\frac{1}{3}x + 3$ ، $g(x) = -3x + 9$

$fog(x) = F(g(x) = f(-3x+9)$

$fog(x) = -\frac{1}{3}(-3x+9) + 9$

$fog(x) = x - 9 + 9$

$fog(x) = x$

$gof(x) = g(f(x) = f(-\frac{1}{3}x+3)$

$gof(x) = -3(-\frac{1}{3}x+3)+9$

$gof(x) = x - 9 + 9$

$gof(x) = x$

$fog(x) = gof(x)$

نـعم كل منهما تمثل دالة عكسية للأخرى

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

$$g(x) = 8x - 10 \quad ، \quad f(x) = \frac{x+10}{8} \ (22$$

$fog(x) = f(g(x)) = f(8x - 10)$

$fog(x) = \dfrac{8x - 10 + 10}{8}$

$fog(x) = \dfrac{8x}{8}$

$fog(x) = x$

$gof(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{x+10}{8}\right)$

$gof(x) = 8 \cdot \dfrac{x+10}{8} - 10$

$gof(x) = x + 10 - 10$

$gof(x) = x$

$fog(x) = gof(x) = x$

نعم كل منهما تمثل دالة عكسية للأخرى

تدرب وحل المسائل :ـ

مثال 3

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

(23 $f(x) = \frac{2}{3}x^3$ ، $g(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x}$ لا

$$fog(x) = \mathcal{F}(g(x) = f(\sqrt{\quad} x)$$

$$fog(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{\frac{2}{3}}x)^3$$

$$fog(x) = \frac{4}{9}\sqrt{\frac{2}{3}}x^3$$

$$fog(x) \neq x$$

لا تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

(24 $f(x) = (x+6)^2$ ، $g(x) = \sqrt{x} - 6$ نعم

$$gof(x) = g(f(x)) = f[(x+6)^2]$$

$$gof(x) = [\sqrt{(x+6)^2} - 6]$$

$$gof(x) = x + 6 - 6$$

$$fog(x) = \mathcal{F}(g(x)) = f(\sqrt{x} - 6)$$

$$fog(x) = (\sqrt{x} + 6 - 6)^2$$

$$fog(x) = (\sqrt{x})^2$$

$$fog(x) = x$$

$$fog(x) = gof(x) = x$$

نعم كل منهما تمثل دالة عكسية للأخرى

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

في كل زوج مما يأتي حدد هل كل دالة تمثل دالة عكسية للأخرى أم لا ؟

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 5 \quad ، \quad f(x) = 2\sqrt{x-5} \quad (25$$

$$fog(x) = f(g(x) = f(\frac{1}{4}x^2 - 5)$$

$$fog(x) = 2(\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 5 - 5})$$

$$fog(x) = 2(\sqrt{\frac{1}{4}x^2 - 10})$$

$$fog(x) \neq x$$

لا تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى

تدرب وحل المسائل :-

مثال 3

26) وقود: إذا كان عدد الكيلومترات التي تقطعها سيارة فهد لكل l لتر من البنزين يعبر عنه بالدالة $k(l) = 12\,l$.



a) أوجد الدالة $c(l)$ التي تمثل سعر l من لترات البنزين.

$$c(l) = 0.45l$$

b) أوجد دالة تمثل سعر الوقود المستهلك في الكيلو متر الواحد، مستعملاً فكرة الدالة العكسية.

$$c(k) = 0{,}04k$$

تدرب وحل المسائل :-

27) هندسة: يُعبر عن مساحة الدائرة بالدالة $A = \pi r^2$.

a) اوجد معكوس الدالة.

$\mathcal{A} =$

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

b) استعمل المعكوس لإيجاد نصف قطر دائرة مساحتها $36cm^2$.

$$r = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

$$r = \sqrt{\frac{36}{3.14}}$$

$$r = 3.39$$

$3.39cm$ تقريباً

تدرب وحل المسائل :-

استعمل اختيار الخط الأفقي لتحدد إذا كان معكوس كل دالة من الدوال الآتية دالة أيضاً:

28) $f(x) = x^3 - 8$ **نعم**

29) $h(x) = 2x^2$ **لا**

30) $g(x) = 3x + 7$ **لا**

تدرب وحل المسائل :-

31) تسوق: اشترى خالد منتجاً عن طريق الإنترنت ودفع مبلغ 2500ريال. فإذا كانت تكلفة التسوق عبر الإنترنت هي 3.5% من السعر الأصلي، وأجرة الشحن 223ريالاً فما السعر الأصلي للمنتج؟

2200 ريال



تـدرب وحـل المسائل :–

32) درجات الحرارة: تستعمل الصيغة $F(x)= \frac{9}{5}x + 32$
للتحويل من درجة الحرارة السليوسية إلى درجة الحرارة الفهرنهايتية.

a) أوجد $F^{-1}(x)$. ثم بين أن $F^{-1}(x)$ و $F(x)$ تمثل كل منهما دالة عكسية للأخرى.

$$F^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

$$F[F^{-1}(x)] = \frac{9}{5}\left[\frac{5}{9}(x - 32)\right] + 32$$

$$= x - 32 + 32$$

$$= x$$

$$F^{-1}[F(x)] = \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x + 32 - 32\right)$$

$$= \frac{5}{9}\left(\frac{9}{5}x + 0\right)$$

$$= x$$

b) فيم تستعمل $F^{-1}(x)$ ؟

يمكن أن تستعمل للتحويل من درجة الحرارة الفهرنهايتية إلى درجة الحرارة السيليزية.



تدرب وحل المسائل :-

33) تمثيلات متعددة: تأمل الدالة $y = x^n$،
حيث ... n =0,1,2.

a) بيانياً: مثل الدوال $y = x^n$ بيانياً للقيم n =0,1,2,3,4

فيديو

b) جدولياً: ما قيم n التي تجعل معكوس هذه الدوال دوال أيضاً؟ سجل نتائجك في جدول.

الدالة	المعكوس الدالة
$y = 1$ أو $y = x^0$	لا
$y = x$ أو $y = x^1$	نعم
$y = x^2$	لا
$y = x^3$	نعم
$y = x^4$	لا

c) تحليلياً: استنتج قيم n التي يكون عندها معكوس الدوال $f(x) = x^n$ دول أيضاً، على فرض أن n عدد كلي.

n عدد فردي

الفهرس